Contrôle n°19 (40mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

1. *Soit* $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$.
   a) *Pourquoi l'endomorphisme* $u^* \circ u$ *est-il diagonalisable ?*
   b) *Exprimer la norme* $\| u \|$, *où* $\| \, \|$ *est la norme subordonnée à la norme euclidienne, en fonction des valeurs propres de* $u^* \circ u$. *(on ne demande pas de démonstration)*
   c) *On suppose que* $u^* \circ u = u \circ u^*$. *Montrer que* $\ker u = \ker u^*$
2. a) *Donner le théorème de convergence normale des séries de Fourier*
   b) *Donner le théorème de Dirichlet de convergence simple des séries de Fourier*

Exercice 2

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$, *vérifiant :*

- f *est* 2π*-périodique*
- f *est impaire*
- $\forall t \in]0, \pi[, \ f(t) = 1$

1. *Déterminer la valeur de* $f(0)$ *et de* $f(\pi)$ *(justifier votre réponse).*
2. *Représenter* f *dans un repère orthonormé sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$
3. *Quel(s) théorème(s) de convergence sur les séries de Fourier peut-on appliquer ?*
4. *Déterminer la série de Fourier de* f
   En déduire :
   - *La valeur de la somme* $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
   - *La valeur de la somme* $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 3

Soit $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien,* $B = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormée de* E, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $f(e_i) = x_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

1. *Donner la définition de l'adjoint de* f.
2. *Soit* $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ *la matrice de* f *dans la base* B, *exprimer* $a_{i,j}$ *en fonction des vecteurs de la base* B, *des vecteurs* $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *et du produit scalaire* $<\,,\,>$
3. *Déterminer la matrice de* $f^* \circ f$ *dans* $\mathcal{B}$ *en fonction des vecteurs* $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *et du produit scalaire* $<\,,\,>$.
4. *En déduire que* $Gram(x_1, \ldots, x_n) = \det_B(x_1, \ldots, x_n)^2$ *où*
   $Gram(x_1, \ldots, x_n) = \det_B\left(< x_i, x_j >\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$
5. *En déduire que* $Gram(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff (x_1, \ldots, x_n)$ *est lié.*

Exercice 4

Soit $(E, <\,,\,>)$ *un espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe* $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'endomorphismes f *de* E *de matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}$

1. *Montrer que* f *est un endomorphisme orthogonal de* E
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de* f

Exercice 5 (hors barême) *Soit* $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien.*

Soit φ_1 *et* φ *deux formes bilinéaires symétriques de matrice respectives dans une base* $\mathcal{B}$ *de* E A *et* B, *on suppose que* φ_1 *est un produit scalaire, on pose pour* $x \in E$, $Q_1(x) = \varphi_1(x, x)$, $Q(x) = \varphi(x, x)$ *et* $f(x) = \dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}$ *si* $x \neq 0$.

Montrer que f *admet un maximum et un minimum absolu sur* $E \setminus \{0\}$ *que l'on déterminera en fonction des valeurs propres de* $A^{-1}B$.