Contrôle n°18 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

1. *Enoncer le théorème de Parseval pour les fonctions T, $(T > 0)$ périodiques et continues par morceaux.*
2. *Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π périodique, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t = 0$*
3. *Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t = 0$*

Exercice 2

1. *Enoncer le théorème de Dirichlet du cours de la convergence simple de la série de fourier d'une fonction de la variable réelle 2π-périodique.*
2. *Enoncer le théorème du cours de la convergence uniforme de la série de fourier d'une fonction de la variable réelle 2π-périodique.*
3. *Pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donner en fonction de f et n les cœfficients de fouriers de f trigonométriques et exponentiels, c'est à dire : pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$, $b_n(f)$ et pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f)$.*
4. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire telle que $\forall t \in [0, \pi]$, $f(t) = t$.*
   a) *Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.*
   b) *Montrer que f est développable en série de fourier, donner la nature de la convergence et la somme de la série de fourier de f.*
   c) *Déterminer $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$ et en déduire la série de fourier trigonométrique de f.*
   d) *Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$*

Exercice 3

1. *Enoncer le théorème de Parseval et donner la formule de Parseval avec les cœfficients trigonométriques et la formule de Parseval avec les cœfficients exponentiels pour les fonctions 2π -périodiques .*
2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire telle que $\forall t \in [0, \pi[$, $f(t) = t$, $f(\pi) = 0$.*
   a) *Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.*
   b) *Déterminer $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$, $b_n(f)$ et en déduire la série de fourier trigonométrique de f.*
   c) *A l'aide de la formule de Parseval déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$*

Exercice 4

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien complexe, on note $\|\ \|$ la norme hermitienne associée, $\forall x \in E$, $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$.
On suppose que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels, non réduit à $\{0\}$, supplémentaires de E et on considère la projection vectorielle p sur E_1 parallèlement à E_2.

1. *Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, développer $\| x_1 + \lambda x_2 \|^2$.*
2. *Pour $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ on note $< x_1, x_2 >= \rho e^{i\theta}$, $\rho \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda = te^{-i\theta}, t \in \mathbb{R}$.*
   Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si p est continue et $N(p) = 1$ avec $N(p) = \sup_{\|x\|=1} \| p(x) \|$

Exercice 5 (hors barême)

Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\mathrm{tr(M)}| \leqslant \sqrt{n\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})}$
où $\overline{M}$ désigne la matrice dont les cœfficients sont les conjugués de ceux de M.