Contrôle n°17 (40mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

Soit $E=\mathbb{R}^2$, on considère la forme linéaire $\varphi \in E^*$ définie par $\forall (x,y)\in E, \varphi((x,y))=2x+y$.

1. *φ est-elle continue sur E (justifier votre réponse).*
2. *Si φ est continue, déterminer la norme de φ subordonnée à la norme $\| \ \ \|_1$ de E avec $\| (x,y) \|_1 = |x|+|y|$.*
3. *Si φ est continue, déterminer la norme de φ subordonnée à la norme euclidienne de E, $\| (x,y) \|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Exercice 2

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $F(x,y)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixyt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. *Enoncer le théorème de continuité des intégrales avec paramètre, le paramètre appartenant à une partie A d'un espace vectoriel normé de dimension finie.*
2. *Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 3

Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace préhilbertien complexe, on note $\| \ \ \|$ la norme hermitienne associée, $\forall x\in E,\ \| x \| = \sqrt{<x,x>}$.
On suppose que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels, non réduit à $\{0\}$, supplémentaires de E et on considère la projection vectorielle p sur E_1 parallèlement à E_2.

1. *Soit $(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, développer $\| x_1+\lambda x_2 \|^2$.*
2. *Pour $(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$ on note $<x_1,x_2>=\rho e^{i\theta},\ \rho\geqslant 0,\ \theta\in\mathbb{R}$ et $\lambda = te^{-i\theta}, t\in\mathbb{R}$.*
   Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si p est continue et $N(p)=1$ avec $N(p)=\sup\limits_{\|x\|=1} \| p(x) \|$

Exercice 4

Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel ou complexe et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n, soit $\mathcal{B}=(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base orthonormée de F.

1. *Enoncer le théorème de projection orthogonale de E sur F*
2. *Pour $x\in E$ exprimer $p(x)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.*
3. *On considère l'espace préhilbertien réel $E=\mathbb{R}_1[X]=\{P\in\mathbb{R}[X],\ \mathrm{d}^\circ P\leqslant 1\}$, muni du produit scalaire $<P,Q>=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$*
   déterminer une base orthonormée de E.

Exercice 5 (hors barême)

On munit $E=\mathbb{R}[X]$ d'une structure préhilbertienne avec un produit scalaire $<\,,\,>$. Soit $u\in L(E)$ vérifiant $\forall (P,Q)\in E^2, <u(P),Q>=<P,u(Q)>$ et $\deg u(P)\leqslant \deg P$.
On note $(P_n)_n$ la base de E obtenue à partir de $(X^n)_n$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Montrer que pour tout n, P_n est un vecteur propre de u.