Contrôle n°16 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

Soit $(E, \| \quad \|_E)$ et $(F, \| \quad \|)_F$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire continue sur E à valeurs dans F.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses dans le cas général :

1. *La boule unité fermée $BF(\vec{0}, 1)$ est un compact de E*
2. *Il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall \vec{x} \in BF(\vec{0}, 1)$, $\| f(\vec{x}) \|_F \leqslant M$.*
3. *Si O est un ouvert de F alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E*
4. *Si K est un compact de F alors $f^{-1}(K)$ est un compact de E.*
5. *Un sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé.*
6. *Si K est un compact de E alors $f(K)$ est un compact de F.*

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on considère la forme linéaire $\varphi \in E^*$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in E, \varphi((x, y, z)) = x - 2y + z$$

1. *φ est-elle continue sur E (justifier votre réponse).*
2. *Si φ est continue, déterminer la norme de φ subordonnée à la norme $\| \quad \|_1$ de E avec $\| (x, y, z) \|_1 = |x| + |y| + |z|$.*
3. *Si φ est continue, déterminer la norme de φ subordonnée à la norme euclidienne de E, $\| (x, y, z) \|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.*

Exercice 3

1. *Donner la définition d'un compact d'un espace vectoriel normé, donner un exemple de compact et un exemple de partie non compacte.*
2. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie que sont les parties compactes de E ?*
3. *Donner la définition d'un connexe par arc d'un espace vectoriel normé, donner un exemple de partie connexe par arc et un exemple de partie non connexe par arc (on ne demande pas de démonstration).*
4. *On considère un réel $\alpha \in]-1, +1[$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \dfrac{\alpha^n}{1 - \alpha^n} \cos(nt)$*
   Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 1\}$.

1. *Pour parler de partie de $\mathbb{R}^3$ ouverte ou fermée a-t-on besoin de préciser une norme sur $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.*
2. *Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}^3$ (on énoncera le ou les théorèmes utilisés).*

   Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.
3. *Donner la définition de l'intérieur d'une partie Ω d'un espace vectoriel normé E*
4. *Donner la définition de l'adhérence d'une partie Ω d'un espace vectoriel normé E*
5. *Montrer que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$*

Exercice 5 (hors barême)

On considère l'espace vectoriel normé $\left(\ell^1(\mathbb{K}), N_2\right)$ où

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum_{k \geqslant 0} |u_k| < +\infty\} \text{ et } N_2((u_n)_n) = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2}$$

Montrer que $\left(\ell^1(\mathbb{K}), N_2\right)$ n'est pas complet. Que dire de $\left(\ell^1(\mathbb{K}), N_\infty\right)$ et de $\left(\ell^1(\mathbb{K}), N_1\right)$?