# **Contrôle n°15** (30mn)

**Exercice 1**

1. *Donner le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque.*
2. *Donner le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales avec paramètre.*
3. *On considère la fonction $F$ définie par* $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \mathrm{d}t$
   a) *Montrer que $F$ est définie pour $x > -1$*
   b) *Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$)*
   c) *Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$*
   d) *Calculer $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $F'(x)$*
   e) *Déterminer $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $F(x)$.*

**Exercice 2**

1. *Résoudre dans $\mathbb{Z}$ :* $\left\{\begin{array}{lcl} x & \equiv & 6\ [\mathrm{mod}\, 5] \\ x & \equiv & 16\ [\mathrm{mod}\, 7] \end{array}\right.$
2. *Déterminer $\varphi(21)$ où $\varphi$ est la fonction indicatrice d'Euler.*

**Exercice 3**

1. *Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$.*
   *Donner la définition de $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes.*
2. *Soit $(E_1, N_1)$ et $(E_2, N_2)$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés, on considère sur $E = E_1 \times E_2$ les deux normes (on ne demande pas de montrer que ce sont des normes) $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ définies par :*

   $$\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E, \quad \| (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \|_\infty = \max(N_1(\vec{x}_1), N_2(\vec{x}_2)) \text{ et } \| (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \|_2 = \sqrt{(N_1(\vec{x}_1))^2 + (N_2(\vec{x}_2))^2}$$

   *Montrer que $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ sont équivalentes.*
3. *Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé et $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$.*
   a) *Donner la définition de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $E$.*
   b) *Donner la définition de $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach.*

**Exercice 4 (hors barème)** *Soit $p$ un nombre premier supérieur ou égal à 3.*
*On rappelle que dans un groupe fini $G$ l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, c'est à dire le cardinal de $G$.*
*Soit $H$ l'ensemble des carrés de* $\left(\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*, \times\right)$

1. *Déterminer le cardinal de $H$*
2. *Montrer qu'un élément $\bar{x}$ de* $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*$ *appartient à $H$ si et seulement si* $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$
3. *En déduire que $\overline{(-1)}$ est un carré dans* $\left(\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*, \times\right)$ *si et seulement si $p \equiv 1 \mod [4]$.*