Contrôle n°14 (30mn)

Exercice 1

1. *Donner le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque.*
2. *Donner le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales avec paramètre.*
3. *On considère la fonction F définie par* $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \mathrm{d}t$
   a) *Montrer que F est définie pour $x > -1$*
   b) *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$)*
   c) *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$*
   d) *Calculer $\forall x \in]-1,+\infty[$, $F'(x)$*
   e) *Déterminer $\forall x \in]-1,+\infty[$, $F(x)$.*

Exercice 2

1. *Résoudre dans $\mathbb{Z}$:* $\begin{cases} x & \equiv & 5\ [\mathrm{mod}\, 2] \\ x & \equiv & 2\ [\mathrm{mod}\, 3] \end{cases}$
2. *Déterminer $\varphi(26)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.*

Exercice 3

1. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.*
   Donner la définition de N_1 et N_2 sont équivalentes.
2. *Soit (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés, on considère sur $E = E_1 \times E_2$ les deux normes (on ne demande pas de montrer que ce sont des normes) $\|\ \ \|_\infty$ et $\|\ \ \|_2$ définies par :*

   $$\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E, \quad \| (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \|_\infty = \max(N_1(\vec{x}_1), N_2(\vec{x}_2)) \text{ et } \| (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \|_2 = \sqrt{(N_1(\vec{x}_1))^2 + (N_2(\vec{x}_2))^2}$$

   Montrer que $\|\ \ \|_\infty$ et $\|\ \ \|_2$ sont équivalentes.

Exercice 4 (hors barême) *Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.*
On rappelle que dans un groupe fini G l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, c'est à dire le cardinal de G.
Soit H l'ensemble des carrés de $\left(\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*, \times\right)$

1. *Déterminer le cardinal de H*
2. *Montrer qu'un élément $\bar{x}$ de* $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*$ *appartient à H si et seulement si $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$*
3. *En déduire que $\overline{(-1)}$ est un carré dans* $\left(\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)^*, \times\right)$ *si et seulement si $p \equiv 1 \mod [4]$.*