Contrôle n°13 (40mn)

Exercice 1

1. *Donner le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.*
2. *Donner le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque.*
3. *On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{t}{e^t-1}$*
   a) *Montrer que $f\in\mathcal{L}^1(]0,+\infty[)$*
   b) *Rappeler la définition de la fonction Γ (fonction Gamma) et son ensemble de définition (on ne demande pas de démonstration)*
   c) *Donner sans démonstration la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$*
   d) *Donner sans démonstration la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$*
   e) *Déterminer pour $n\in\mathbb{N}^*$ la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t$, on pourra utiliser la fonction Gamma et un changement de variable.*
   f) *Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t$*
   g) *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t$ (On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$)*

Exercice 2

1. *Dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à sa base canonique, on considère l'endomorphisme φ de matrice*
$$M=\begin{pmatrix}6&0&0&-6\\0&24&0&0\\0&0&60&0\\0&0&0&12\end{pmatrix}$$
   a) *Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de φ*
   b) *φ est-il diagonalisable ?*
   c) *φ est-il un automorphisme ?*
2. *Dans $\mathbb{R}_3[X]$ rapporté à sa base canonique, on considère l'endomorphisme ψ de matrice*
$$N=\begin{pmatrix}0&6&6&6\\0&0&24&24\\0&0&0&60\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
   a) *Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de φ*
   b) *φ est-il diagonalisable ?*
   c) *φ est-il un automorphisme ?*

Exercice 3

1. *Donner la définition d'un groupe cyclique et donner un exemple de groupe cyclique et un exemple de groupe qui n'est pas cyclique.*
2. *On pose pour $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(x\sin t)\mathrm{d}t$*
   a) *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.*
   b) *En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{\pi}\sin(x\sin t)\mathrm{d}t$*

Exercice 4 (hors barême)

1. *Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-t^2+i)x^2}}{t^2-i}\mathrm{d}t$*
   a) *Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$*
   b) *Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$*
   c) *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, déterminer $F'(x)$ et étudier la dérivabilité de F en 0. (on pourra exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ en fonction de $\Gamma(\frac{1}{2})$)*
   d) *En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$*
2. *Montrer qu'un sous-groupe fini du groupe des inversibles d'un corps commutatif est cyclique.*