Contrôle n°12 (30mn)

Exercice 1

1. *Donner le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les suites de fonctions.*
2. *Donner le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque.*
3. *On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par* $f(t)=\dfrac{t}{e^t-1}$
   a) *Montrer que* $f\in\mathcal{L}^1(]0,+\infty[)$
   b) *Rappeler la définition de la fonction Γ (fonction Gamma) et son ensemble de définition (on ne demande pas de démonstration)*
   c) *Donner sans démonstration la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$*
   d) *Donner sans démonstration la valeur de* $\Gamma(\frac{1}{2})$
   e) *Déterminer pour $n\in\mathbb{N}^*$ la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t$, *on pourra utiliser la fonction Gamma et un changement de variable.*
   f) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t$
   g) *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t$ *(On rappelle que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$*)*

Exercice 2

On pose $\displaystyle F(x)=\int_0^{\pi}\sin(x\sin t)\mathrm{d}t$

1. *Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$*
2. *Déterminer la valeur de $F'(0)$*
3. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{\pi}\sin(x\sin t)\mathrm{d}t$

Exercice 3

1. *Pour quelles valeurs de α les affirmations suivantes sont-elles vraies ?*

   a) $\dfrac{1}{(t+2)^\alpha}\in\mathcal{L}^1(]-2,0])$ b) $\dfrac{1}{t^\alpha}\in\mathcal{L}^1([1,+\infty[)$ c) $e^{-\alpha t}\in\mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

2. *Montrer l'existence et calculer* $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{\sqrt{(1-t)}}\mathrm{d}t$
3. *Montrer l'existence et calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
4. *Montrer la convergence simple sur $]0,+\infty[$ de la série de fonction :*

$$\sum_{n\geq 2}u_n(x)\ \text{avec}\ u_n(x)=\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}-\frac{1}{n^x}\ ,\quad n\geq 2$$

Exercice 4 (hors barème)

Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-t^2+i)x^2}}{t^2-i}\mathrm{d}t$

1. *Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$*
2. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$
3. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $F'(x)$*
   (on pourra exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ *en fonction de* $\Gamma(\frac{1}{2})$*)*
4. *En déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$