Contrôle n°11 bis (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

- On accordera une attention particulière aux inégalités et aux valeurs absolues, on rappelle que si $x \in \mathbb{R}$, x n'est pas un nombre positif et que par exemple la proposition $\dfrac{x}{1+x^2} \leq x$ est incorrecte dans le cas général (voir par exemple le cas $x = -1$). Par contre $\dfrac{|x|}{1+x^2} \leq |x|$ est une proposition correcte.
- Ne pas oublier de préciser les hypothèses dans les résultats de cours énoncés.

Exercice 1

1. *Soit f une application continue par morceaux d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ Donner la définition de f est intégrable sur I et de la valeur de l'intégrale sur I.*
2. *Soit f une application continue par morceaux d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ Donner la définition de f est intégrable sur I.*
3. *Pour $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$, indiquer si $f \in \mathcal{L}^1(I)$ dans les cas suivants, on justifiera la réponse :*
   a) $f(t) = \dfrac{t^2+1}{\sqrt{1-t}}, \quad I = [0, 1[$.
   b) $f(t) = te^{-t^2}, \quad I =]-\infty, +\infty[$, *éventuellement calculer* $\displaystyle\int_{]-\infty,+\infty[} te^{-t^2}\mathrm{d}t$.
   c) $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$, $I =]0, +\infty[$

Exercice 2

1. *Enoncer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^n}$ et on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{1+t^n}\mathrm{d}t$*
   a) *Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0, +\infty[$*
   b) *Etudier la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*

Exercice 3

1. *Pour une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit $[a, b] \subset I$, énoncer le résultat concernant l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}$ entre a et b.*
2. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on suppose que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(t)| \leq n!$$
   a) *Ecrire l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n de la fonction f entre 0 et x, $x \in \mathbb{R}$*
   b) *Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, +1[$*
3. *Donner le développement en série entière de la fonction f et l'intervalle de validité dans les cas suivants :*
   a) $f(x) = \operatorname{sh} x$ *(remarque $f(x) = \operatorname{sh} x$ se note aussi $f(x) = \sinh x$, notation anglo-saxonne)*
   b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   c) $f(x) = \arctan x$