Contrôle n°11 (40mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

1 Pour quelles valeurs de α *les affirmations suivantes sont-elles vraies ?*

a) $\dfrac{1}{(2-t)^\alpha} \in \mathcal{L}^1([0,2[)$ *b)* $\dfrac{1}{t^\alpha} \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[)$ *c)* $e^{-\alpha t} \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

2 Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(1-t)}}\mathrm{d}t$

3 Montrer la convergence simple sur $]0,+\infty[$ *de la série de fonction :*

$$\sum_{n\geq 2} u_n(x) \text{ avec } u_n(x) = \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - \frac{1}{n^x}\ , \quad n \geq 2$$

Exercice 2

Etudier l'existence des intégrales suivantes (justifier les réponses) :

1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$

2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\sin t\mathrm{d}t$

3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

4 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t$ *où* f *est une fonction continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs complexes telle que pour tout segment* $I \subset \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t \leq 2$

Exercice 3

Etudier la convergence uniforme sur l'intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ *dans les cas suivants :*

1 $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{1+2^n}, \quad I = \mathbb{R}$ *2* $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{1+n}}, \quad I = [0,1]$

Exercice 4

1 Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les suites de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I

2 Enoncer le théorème de continuité des fonctions de la variable réelle, définies avec une intégrale avec paramètre

3 Enoncer le théorème de dérivabilité des fonctions de la variable réelle, définies avec une intégrale avec paramètre

4 Montrer que pour $f(t) = e^{-\sqrt{t}}$ *on a* $f \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

5 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-n\sqrt{t}}}{n+t}\mathrm{d}t = 0$

6 Soit f *une fonction continue par morceaux sur* $[0,+\infty[$ *telle que* $f \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *montrer l'existence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 t} f(t)\mathrm{d}t$

b) Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 t} f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 5 (hors barême)

On considère la fonction F *telle que pour* $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle F(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

1 Montrer que F *est définie sur* $\mathbb{R}$

2 Montrer que F *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$

3 Déterminer le développement en série entière de F *sur* $\mathbb{R}$ *et donner la valeur de* $F^{(n)}(0)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$

4 Montrer que F *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.