Contrôle n°10 (30mn)

Exercice 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. *Donner la définition de :* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge normalement sur* I
2. *Dans les cas suivant déterminer* $\sup_{x\in I}|u_n(x)|$ *et indiquer, en justifiant votre réponse si la convergence de la série est normale sur* I *:*
   a) $I=\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\quad u_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2}$

   b) $I=[0,+\infty[$, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, $\quad u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{(\sin(nx))^2+n}$
3. *Pour* $I=]0,+\infty[$ *et* $\forall n\geqslant 1,\ \forall x\in I,\ u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ *montrer que :*
   a) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *ne converge pas normalement sur* I

   b) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge simplement sur* $]0,+\infty[$

   c) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge uniformément sur* $]0,+\infty[$

Exercice 2

Déterminer, en justifiant votre réponse le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{2n}}{3^n}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} e^{-\sin n}x^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)x^n$

Exercice 3

1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on suppose qu'il existe un réel $M>0$ tel que* $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R},\ |f^{(n)}(t)|\leq M^n$
   a) *Ecrire l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n de la fonction f entre 0 et x, $x\in\mathbb{R}$*

   b) *Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$*
2. *Donner le développement en série entière de la fonction f et l'intervalle de validité dans les cas suivants :*
   a) $f(x)=\sin x$

   b) $f(x)=\ln(1+x)$

Exercice 4

1. *Donner la définition d'une fonction intégrable et de la valeur de l'intégrale pour une fonction continue par morceaux et positive sur un intervalle I.*
2. *Montrer l'existence et calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$
3. *Montrer l'existence de* $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{\sqrt{(1-t)}}\mathrm{d}t$
4. *Montrer la convergence simple sur* $]0,+\infty[$ *de la série de fonction :*

$$\sum_{n\geq 2} u_n(x) \text{ avec } u_n(x)=\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}-\frac{1}{n^x}\ ,\quad n\geq 2$$

Exercice 5 (hors barème)

Etudier la convergence simple, uniforme, normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\sin(\pi\sqrt{n^2+t^2})$.