Contrôle n°1 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

On considère les fonctions $f_k, k = 1, \cdots, 4$ *définies par :*

$f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad f_2(x) = \sin(x)$, $\quad f_3(x) = \ln(1-x)$, $\quad f_4(x) = \arctan(x)$.

1. *Ecrire le développement limité à l'ordre 5 en 0,* $DL_5(0)$*, de chacune des fonctions* f_k , $k = 1, \cdots, 4$.
2. *Ecrire le développement limité à l'ordre* $2n+1$ *en 0,* $DL_{2n+1}(0)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, de chacune des fonctions* f_k , $k = 1, \cdots, 4$.

Exercice 2

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

1. *On a au voisinage de* 0 *:* $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
   Ceci permet d'obtenir un développement limité au voisinage de 0 *de* $f(x)$ *à l'ordre* 3 *(répondre vrai ou faux et justifier votre réponse)*
2. *Au voisinage de* 0 *on a (répondre vrai ou faux pour chaque affirmation) :*
   - $f(x) = 1 - \dfrac{x}{6} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)$
   - $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)$
   - $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + O(x^4)$
   - $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{7}{360}x^4 + o(x^4)$

Exercice 3

Soit f *une fonction de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *et* n *un entier naturel.*

1. *Ecrire la formule de Taylor de* f *avec reste intégral à l'ordre* n *entre 0 et* x *pour* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Ecrire l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre* n *au voisinage de* 0.
3. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ *c'est à dire que* $\cos x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$

Exercice 4

1. *Pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *montrer que* $xy \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$
2. *Pour* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, développer* $(x + y + z)^2$.
3. *Soit* $A = \{t = xy + yz + zx,\ $ *où* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ $ *et* $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$
   a) *Montrer que* $\forall t \in A,\ t \leqslant 1$
   b) *Montrer que* $\forall t \in A,\ t \geqslant -\dfrac{1}{2}$
   c) *Montrer que* $\max A = 1$ *et* $\min A = -\dfrac{1}{2}$

Exercice 5 (Exercice hors barême)

On considère $(x_0, y_0, z_0) \in]0, +\infty[^3$ *et on définit par récurrence les trois suites :* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en posant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = | y_n - z_n |, \quad y_{n+1} = | x_n - z_n |, \quad z_{n+1} = | x_n - y_n |$$

1. *A l'aide de l'inégalité triangulaire dans* $\mathbb{R}$*, pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *majorer en fonction de* $x - y$, $\quad | \, |x| - |y| \, |$
2. *Montrer que les suites* $(x_n)_{n\geq1}$, $(y_n)_{n\geq1}, (z_n)_{n\geq1}$ *sont décroissantes.*
3. *Montrer que les trois suites convergent, que l'une converge vers* 0 *et les deux autres ont la même limite.*
4. *Pour* $l \in \mathbb{R}^+$*, déterminer* (x_0, y_0, z_0) *de façon que* (x_n) *converge vers* 0 *et* (y_n) *et* (z_n) *convergent vers* l.