Dualité
Systèmes linéaires - Matrices

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

Dans ce chapitre E désigne un $\mathbf{K}$ espace vectoriel
($\mathbf{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou plus généralement un corps de caractéristique nulle)

Pour ce chapitre il est conseillé de connaître les notions de base sur les espaces vectoriels et applications linéaires.
Voir par exemple les documents :
espaces vectoriels, espaces vectoriels de dimension finie, espaces vectoriels premières notions

1 Espace dual

1.1 Définition

On appelle dual de E l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, on le note E^*, $\quad E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$
Si E est de dimension finie alors $\dim E^* = \dim E$

Remarque 1
Dans le cadre de la dualité, si $(\vec{x}, \varphi) \in E \times E^*$ alors $\varphi(\vec{x})$ se note aussi $< \vec{x}, \varphi >$.
L'application : $\begin{array}{ccc} E \times E^* & \to & \mathbf{K} \\ (\vec{x}, \varphi) & \mapsto & < \vec{x}, \varphi > \end{array}$ *est une forme bilinéaire de $E \times E^*$ dans $\mathbf{K}$.*

1.2 Hyperplans

Définition 1 *On appelle hyperplan d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E tout sous-espace vectoriel de codimension 1.*

Proposition 1 *Soit H un hyperplan de E, $u \notin H$ et $D = \mathbf{K}u$ la droite vectorielle engendrée par u, on a $E = H \oplus D$*

Proposition 2 *Si $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ alors $\ker \varphi$ est un hyperplan de E*

Proposition 3 *Soit H un hyperplan de E, on a :*

1. *L'ensemble des formes linéaires dont le noyau contient H est une droite vectorielle de E^**
2. *Pour $e \notin H$ il existe une unique forme linéaire φ telle que $\ker \varphi = H$ et $\varphi(e) = 1$*

Conséquence : Si $(\varphi_1, \varphi_2) \in E^* \times E^*$ et $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$, alors $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \lambda \neq 0$ tel que $\varphi_2 = \lambda \varphi_1$.

Proposition 4 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\vec{e}$ un vecteur de E, on a :*
- *Si $\vec{e} \neq \vec{0}$ alors il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(\vec{e}) = 1$.*
- *$\vec{e} = \vec{0}$ si et seulement si $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(\vec{e}) = 0$*

2 Dualité en dimension finie

Dans ce paragraphe on suppose que E est de dimension finie $\dim E = n$, soit $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.

2.1 Equation d'un hyperplan

Soit $\varphi \in E^*$ on a $\varphi :$ $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{K} \\ \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n & \mapsto & a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \end{array}$ avec $\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = \varphi(e_k)$
$\varphi \neq 0 \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$
Pour $\varphi \neq 0$, l'hyperplan $\ker \varphi$ admet pour équation : $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$
Tout hyperplan H de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle, de sorte qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ tel que H admette pour équation : $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.

Proposition 5 *Soit H_1 et H_2 deux hyperplans admettant pour équation respective*
$\mathbf{H_1} :\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$
$\mathbf{H_2} :\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0$
on a : $H_1 = H_2$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \lambda \neq 0,\ (b_1, \ldots, b_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n)$.

Proposition 6 *L'application θ :* $\begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbf{K}^n \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel*

2.2 Base duale

Proposition 7

Pour $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, *pour* $k \in [\![1, n]\!]$ *on considère la forme linéaire* e_k^* *définie par* $e_k^*(\vec{x}) = x_k$,
e_k^* *est la* k*-ième forme linéaire coordonnée associée à la base* $\mathcal{B}_0$.
$(e_1^*, \dots, e_n^*)$ *est une base de* E^**, on dit que c'est la base des formes linéaires coordonnées*

Définition 2 (Base duale)
Pour une base $\mathcal{B}$ *de* E*, la base des formes linéaires coordonnées, notée* $\mathcal{B}^*$*, est appelée la base duale de* $\mathcal{B}$.

Proposition 8
Soit $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *base de* E *et* $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ *la base duale associée.*

- *Pour* $\vec{x} \in E$ *on a* $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(\vec{x}) \vec{e}_k$
- *Pour* $\varphi \in E^*$ *on a* $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\vec{e}_k) e_k^*$

Proposition 9
Pour $\mathcal{B}_0$ *base de* E *la base duale* $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ *est déterminée par les relations de Kronecker :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_i^j \text{ où } \delta_i^j = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Proposition 10
Si $f \in \mathcal{L}(E)$, *de matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$
Alors $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = e_i^*(f(\vec{e}_j))$ *ce qui se note aussi* $a_{ij} =< f(\vec{e}_j), e_i^* >$

2.3 Base anté-duale

Théorème 1
Pour toute base $L = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ *de* E^* *il existe une unique base* $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ *de* E *telle que* L *est la base duale de* $\mathcal{B}$, $L = \mathcal{B}^*$.
On dit que $\mathcal{B}$ *est la base anté-duale de* L.

Proposition 11
Si
- $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ *est un système de* n *vecteurs de* E
- $S^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est un système de* n *formes linéaires de* E^*
- *On suppose* $\forall (i,j)\ [\![1, n]\!]^2$, $\varphi_i(\vec{u}_j) = \delta_i^j$

Alors
- S *est une base de* E *et* S^* *est une base de* E^*
- S^* *est la base duale de* S *et* S *est la base anté-duale de* S^*

Proposition 12
Si
- $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *est une base de* E *et* $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ *est la base duale.*
- $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ *est une base de* E *et* $\mathcal{B}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ *est la base duale.*
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est la matrice de* $\mathcal{B}$ *dans la base* $\mathcal{B}_0$ *et* $A^* \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est la matrice de* $\mathcal{B}^*$ *dans la base* $\mathcal{B}_0^*$

Alors
$A^* = \left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1})$, $\quad {}^tA^* \cdot A = I_n \quad$ *où* I_n *est la matrice identité d'ordre* n

2.4 Exemples

1. **Formule de Taylor pour les polynômes**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E_n = \mathbf{K}_n[X]$ le $\mathbf{K}$ espace vectoriel des polynômes à cœfficients dans $\mathbf{K}$ de degré inférieur ou égal à n, E_n est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension $n+1$. Pour $a \in \mathbf{K}$ on considère les polynômes $P_k = (X-a)^k$, $k \in [\![0, n]\!]$ et les formes linéaires φ_k, $k \in [\![0, n]\!]$ définies par $\forall P \in E_n$, $\varphi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$:
   - On vérifie que $\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_i(P_j) = \delta_i^j$
   - par suite on peut conclure :

- $\mathcal{B} = \left((x-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E_n, $\mathcal{B}^* = (\varphi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E_n^*
- $\mathcal{B}^*$ est la base duale de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est la base anté-duale de $\mathcal{B}^*$
- $\forall P \in E_n,\ P = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(P) P_k$ soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(X-a)^k$
  (on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes)

2. **Polynômes d'interpolation de Lagrange**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E_n = \mathbf{K}_n[X]$ le $\mathbf{K}$ espace vectoriel des polynômes à cœfficients dans $\mathbf{K}$ de degré inférieur ou égal à n, E_n est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension $n+1$.
   Soit $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ éléments de $\mathbf{K}$ distincts deux à deux, $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux points $a_0, \ldots, a_n$, $L_k(X) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (X-a_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (a_k-a_i)}$ et $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ les formes linéaires de E_n^* définies par $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall P \in E_n,\ \varphi_k(P) = P(a_k)$.

   - On vérifie que : $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ \varphi_i(L_j) = \delta_i^j$
   - par suite on peut conclure :
     - $\mathcal{B} = (L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E_n, $\mathcal{B}^* = (\varphi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E_n^*
     - $\mathcal{B}^*$ est la base duale de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est la base anté-duale de $\mathcal{B}^*$
     - $\forall P \in E_n,\ P = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(P) L_k$ soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k(X)$

3 Trace d'une application linéaire

Définition 3 (Trace d'une matrice)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ on définit la trace de A par $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Proposition 13 tr *est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,* $\quad \mathrm{tr} \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^*$

Proposition 14 $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Proposition 15 *Deux matrices semblables ont même trace*

conséquence :
On peut définir la trace d'un endomorphisme

Définition 4
Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de f la trace d'une matrice de f dans une base de E

D'après la proposition précédente cette définition ne dépend pas de la base de E choisie.

Proposition 16 *La trace d'un projecteur est égale à son rang.*
C'est à dire que si E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rang}(p)$

4 Systèmes linéaires

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, le lecteur pourra compléter les résultats donnés en dimension finie en regardant le TD "Complément dualité" qui permet de généraliser certains résultats aux sous espaces vectoriels de codimension finie dans les espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie .

4.1 Systèmes d'équations d'un sous espace vectoriel

Théorème 2
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ un système libre de q éléments de E^* et $\varphi \in E^*$. On a :

$$\bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \iff \varphi \in \mathrm{vect} < \varphi_1, \ldots, \varphi_q >$$

Théorème 3

Si $\dim E = n$ *et* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ *est un système libre de* E^* **Alors** $\dim \bigcap_{i=1}^{q} \ker \varphi_i = n - q$

Conséquence : Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est un système de r formes linéaires de E^* de rang q Alors $\dim \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i = n - q$

Théorème 4
Si
F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p
Alors
Il existe $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-p}) \in (E^*)^{n-p}$ un système libre de $n-p$ formes linéaires de E^* tel que $F = \ker \varphi_1 \cap \ldots \cap \ker \varphi_{n-p}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_1(\vec{x}) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \varphi_{n-p}(\vec{x}) & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{est alors un système d'équation de } F$$

Théorème 5
Si *F est un sous espace vectoriel de E de dimension p*
Alors *L'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$*

4.2 Systèmes de p équations à n inconnues

On considère :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

un système de p équations à n inconnues avec second membre, on a :

- $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$ est la matrice du système $\mathcal{S}$
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbf{K})$ est le second membre, on a aussi $(b_1, \ldots, b_p) \in \mathbf{K}^p$
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ est le vecteur inconnu, on a aussi $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$

Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit aussi :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} AX & = & B \\ X & \in & \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_1(\vec{x}) & = & b_1 \\ \vdots & & \\ \varphi_p(\vec{x}) & = & b_p \end{array} \right. \quad \text{avec } \forall i \in [\![1, p]\!],\ \varphi_i \in (\mathbf{K}^n)^*,\ \varphi_i\left((x_1, \ldots, x_n)\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

à $(\mathcal{S})$ on associe le système homogène :

$$(\mathcal{S}_h) : \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \text{ou} \left\{ \begin{array}{lcl} AX & = & 0 \\ X & \in & \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi_1(\vec{x}) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \varphi_p(\vec{x}) & = & 0 \end{array} \right.$$

Interprétations des solutions des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_h)$:

Pour $(\mathcal{S}_h)$ soit $\vec{S} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ AX = 0,\ \text{avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\}$

- $\vec{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$
- $\vec{S}$ est le noyau de l'application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_p(\vec{x}))$
- Si on désigne par $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})^n$ les vecteurs colonnes de A,

  $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_h$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} x_jC_j = 0$

Pour $(\mathcal{S})$ soit $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ AX = B,\ \text{avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\}$

- Si S n'est pas vide c'est un sous-espace affine de $\mathbf{K}^n$ de direction $\vec{S}$, si $x_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ est une solution de $\mathcal{S}$ alors $S = x_0 + \vec{S}$
- Si $S \neq \varnothing$, S est l'ensemble des antécédents du vecteur $\vec{b} = {}^tB = (b_1, \ldots, b_p)$ par l'application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_p(\vec{x}))$
- Si on désigne par $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbf{K})^n$ les vecteurs colonnes de A, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_h$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j C_j = B$
- S n'est pas vide si et seulement si $B \in \text{vect} < C_1, \ldots, C_n >$

5 Matrices

5.1 Matrices semblables

Définition 5
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, on dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{F})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 17
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la relation $\mathscr{R}$ avec "$A\mathscr{R}B \Leftrightarrow A$ et B sont semblables " est une relation d'équivalence.

Proposition 18
Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension n, pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, on a :
M et N sont semblables si et seulement si il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que M soit la matrice de f dans $\mathcal{B}_1$ et N soit la matrice de f dans $\mathcal{B}_2$.
De plus si P est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $N = P^{-1}MP$

Proposition 19
Deux matrices semblables ont :
- *Même rang*
- *Même déterminant*
- *Même trace*

La réciproque est fausse par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même rang, même déterminant, même trace et pourtant ces deux matrices ne sont pas semblables car la seule matrice semblable à I_n est I_n

5.2 Matrices équivalentes

Définition 6
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})^2$, on dit que A et B sont équivalentes s'il existe $(P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbf{K})$ tel que $B = Q^{-1}AP$.

Proposition 20
Deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semblables sont équivalentes.

Proposition 21
Dans $\mathcal{M}_{pn}\mathbf{K}$, la relation d'équivalence sur les matrices est une relation d'équivalence, c'est à dire c'est une relation :
- *Réflexive : $\forall A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$, A et A sont équivalentes.*
- *Symétrique : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})^2$, Si A et B sont équivalentes alors B et A sont équivalentes.*
- *Transitive : $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})^3$, Si A et B sont équivalentes et B et C sont équivalentes Alors A et C sont équivalentes.*

Proposition 22
Si
- *E et F sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie,* $\dim E = n$ *et* $\dim F = p$
- *$\mathcal{B}_{1E}$ et $\mathcal{B}_{2E}$ sont deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_{1E}$ à $\mathcal{B}_{2E}$, $P \in GL_n(\mathbf{K})$*
- *$\mathcal{B}_{1F}$ et $\mathcal{B}_{2F}$ sont deux bases de F et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_{1F}$ à $\mathcal{B}_{2F}$, $Q \in GL_p(\mathbf{K})$*
- *$f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{F})$ dans les bases $\mathcal{B}_{1E}$ et $\mathcal{B}_{1F}$ et de matrice $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{F})$ dans les bases $\mathcal{B}_{2E}$ et $\mathcal{B}_{2F}$*

Alors

$$B = Q^{-1}AP$$

Proposition 23 (interprétation de l'équivalence de matrice à l'aide des applications linéaires)
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})^2$,
A *et* B *sont équivalentes si et seulement si* $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p)$ *et des bases* $\mathcal{B}_{1E}$ *et* $\mathcal{B}_{2E}$ *de* E, $\mathcal{B}_{1F}$ *et* $\mathcal{B}_{2F}$ *de* F *telles que :*

- A *soit la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}_{1E}$ *et* $\mathcal{B}_{1F}$
- B *soit la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}_{2E}$ *et* $\mathcal{B}_{2F}$

Théorème 6
Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$ *une matrice de rang* r
A *est équivalente à la matrice* $J_r = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *avec* $a_{ii} = 1$ *si* $i \in [\![1, r]\!]$, $a_{ij} = 0$ *sinon.*

Théorème 7
Deux matrices $(A,B) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})^2$ *sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Proposition 24
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est une matrice carrée d'ordre* n
Alors A *et* ${}^tA$ *sont équivalentes, en particulier* A *et* ${}^tA$ *ont même rang.*

5.3 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice

Chacune des opérations élémentaires suivantes sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice consiste à multiplier celle-ci à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible, de sorte que l'on obtient une matrice équivalente qui est donc de même rang que la matrice initiale.
Description des trois opérations usuelles sur les lignes ou les colonnes d'une matrice : Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$

Echange de deux lignes : $\mathbf{L_i} \leftrightarrow \mathbf{L_j}$
Lorsque l'on échange les lignes L_i et L_j cela revient à multiplier A à gauche par la matrice $G_{ij} \in GL_p(\mathbf{K})$ avec $G = (g_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}$ où $g_{ij} = g_{ji} = 1$, $g_{kk} = 1$, $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$ et $g_{kl} = 0$ sinon. G_{ij} est la matrice de l'endomorphisme $g_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p)$ de matrice G_{ij} dans la base canonique $(\vec{e}_l)_{1 \leqslant l \leqslant p}$ de $\mathbf{K}^p$ avec
$\forall l \in [\![1, p]\!] \setminus \{i, j\}$, $g_{ij}(\vec{e}_l) = \vec{e}_l$, $g_{ij}(\vec{e}_i) = \vec{e}_j$, $g_{ij}(\vec{e}_j) = \vec{e}_i$.
(L'échange des colonnes i et j correspond à la multiplication à droite par la matrice $G_{ij} \in GL_n(\mathbf{K})$)

Multiplication d'une ligne par $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \neq 0$ **:** $\mathbf{L_i} \leftarrow \lambda\mathbf{L_i}$
Lorsque l'on multiplie la ligne L_i par $\lambda \neq 0$, cela revient à multiplier A à gauche par la matrice $H_{i\lambda} \in GL_p(\mathbf{K})$ avec $H = (h_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}$ où $h_{ii} = \lambda$, $h_{kk} = 1$, $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ et $h_{kl} = 0$ sinon. H_{ij} est la matrice de l'endomorphisme $h_{i\lambda} \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p)$ de matrice $H_{i\lambda}$ dans la base canonique $(\vec{e}_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de $\mathbf{K}^p$ avec
$\forall k \in [\![1, p]\!] \setminus \{i\}$, $h_{i\lambda}(\vec{e}_k) = \vec{e}_k$, $h_{i\lambda}(\vec{e}_i) = \lambda\vec{e}_i$.
(La multiplication de la colonne j par λ correspond à la multiplication à droite par la matrice $H_{j\lambda} \in GL_n(\mathbf{K})$)

Ajout à la ligne L_i **la ligne** L_j **multipliée par** λ **:** $\mathbf{L_i} \leftarrow \mathbf{L_i} + \lambda\mathbf{L_j}$
Lorsque l'on ajoute à la ligne L_i la ligne L_j multipliée par λ, cela revient à multiplier A à gauche par la matrice $T_{ij\lambda} \in GL_p(\mathbf{K})$ avec $T_{ij\lambda} = (t_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}$ où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $t_{kk} = 1$, $t_{ij} = \lambda$ et $t_{kl} = 0$ sinon. $T_{ij\lambda}$ est la matrice de l'endomorphisme $t_{ij\lambda} \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p)$ de matrice $T_{ij\lambda}$ dans la base canonique $(\vec{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de $\mathbf{K}^p$ avec
$\forall k \in [\![1, p]\!] \setminus \{j\}$, $t_{ij\lambda}(\vec{e}_k) = \vec{e}_k$, $t_{ij\lambda}(\vec{e}_j) = \vec{e}_j + \lambda\vec{e}_i$.
(Lorsque l'on ajoute à la colonne C_j la colonne C_i mutipliée par λ cela correspond à la multiplication à droite par la matrice $T_{ij\lambda} \in GL_n(\mathbf{K})$).

Applications :

1. **Rang d'une matrice** Les opérations sur les lignes ou les colonnes d'une matrice permettent d'obtenir le rang d'une matrice.
Méthode : à partir de la matrice A, à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice on construit une matrice équivalente de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r,r} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in \{1, \cdots, r\},\ a_{ii} \neq 0$
Le rang de la matrice est alors r

2. **Déterminant d'une matrice carrée** Les opérations sur les lignes ou les colonnes d'une matrice permettent d'obtenir le calcul du déterminant d'une matrice.
   Méthode : à partir de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice de on construit une matrice équivalente triangulaire dont le déterminant est le produit des termes de la diagonale, il suffit juste de savoir par quel nombre le déterminant initial à été multiplié, ce que l'on détermine en notant les modifications du déterminant D de la matrice lorsque l'on effectue les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes. Celles-ci sont données ci-dessous :

Opérations lignes	**(colonnes)**	**Modification de** D
$\mathbf{L_i} \leftrightarrow \mathbf{L_j}$	$(\mathbf{C_i} \leftrightarrow \mathbf{C_j})$	$\mathbf{D} \to -\mathbf{D}$
$\mathbf{L_i} \leftarrow \lambda\mathbf{L_i}$	$(\mathbf{C_i} \leftarrow \lambda\mathbf{C_i})$	$\mathbf{D} \to \lambda\mathbf{D}$
$\mathbf{L_i} \leftarrow \mathbf{L_i} + \lambda\mathbf{L_j}$	$(\mathbf{C_i} \leftarrow \mathbf{C_i} + \lambda\mathbf{C_j})$	$\mathbf{D} \to \mathbf{D}$

3. **Résolution de systèmes** Les opérations sur les lignes d'une matrice permettent de résoudre un système linéaire de p équations à n inconnues avec second membre.
   Méthode : On écrit le système $AX = B$ (voir le paragraphe système linéaire) sous la forme matricielle :

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right.$$

   On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de façon à obtenir un système équivalent de la forme :

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & & \cdots & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & & \cdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{r,r} & \cdots & a_{rn} & b'_r \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b'_p \end{array}\right.$$

   Où r est le rang du sytème.

4. **Inverse d'une matrice** On effectue les opérations seulement sur les lignes ou seulement sur les colonnes.
   Méthode : Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on effectue les opérations élémentaires sur la matrice A de façon à la transformer en la matrice identité (ce qui n'est possible que si A est de rang n donc inversible), parallèlement on effectue les mêmes opérations sur la matrice identité, la matrice équivalente à l'identité obtenue est alors l'inverse de la matrice A.